Vorbereitungskurs

Mathematik

Grundlagen für das Unterrichtsfach Mathematik für die Fachhochschulreifeprüfung

Zweijährige Höhere Berufsfachschule

Berufsoberschule I

Duale Berufsoberschule

Inhalt

0. Vorwort

Liebe (zukünftigen) Schülerinnen und Schüler!

Auf dem Weg zur Fachhochschulreifeprüfung haben wir in Mathematik die Lernbausteine 3 und 4 zu bearbeiten.

Dies bedeutet, dass wir die **Lerninhalte der Lernbausteine 1 und 2**, die auf dem Weg zum qualifizierten Sekundarabschluss 1 (Mittlere Reife) vermittelt werden, **voraussetzen**.

Aus diesen beiden Lernbausteinen wurden einige grundlegende Themengebiete hier zusammengestellt, um einen möglichst reibungslosen Einstieg im Unterrichtsfach Mathematik an unserer Schule sicherzustellen.

Wir setzen voraus, dass dieser Vorbereitungskurs Mathematik (wie dies der Name schon vermuten lässt) **vor der ersten Unterrichtsstunde in Mathematik** von allen Schülern bearbeitet wurde und ggf. erkannte Lücken und Schwierigkeiten behoben wurden. Bei der Aufarbeitung von Lerninhalten helfen u.U. die Schulbücher und Schulhefte der vergangenen Schuljahre.

In diesem Sinne: eine gute Vorbereitung und einen guten Start ins neue Schuljahr!

An dieser Stelle vielen Dank an das Mathe-Team der BBS Gerolstein für die Bereitstellung des dort verwendeten Vorbereitungskurses, den wir an unsere Bedürfnisse angepasst haben.

Stellvertretend für das Mathe-Team

Thomas Keck

1. Rechenregeln

„Punkt vor Strich“

$$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

$$2 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 12 : 4 = 2 + 12 - 10 + 3 = 7$$

Auflösen von Klammern

Steht ein Pluszeichen vor einer Klammer, kann die Klammer einfach weggelassen werden:

$$5 + (3 - 2) = 5 + 3 - 2 = 6$$

Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer, ändern sich **alle** Vorzeichen in der Klammer, wenn die Klammer weggelassen wird:

$$3 - (5 - 3 + 2) = 3 - 5 + 3 - 2 = -1$$

Multiplikation mit Summen oder Differenzen

Allg.: $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Bsp.: 1) $4 \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 + 12 = 20$

2) $2a\,(3b - 2c + d) = 6ab - 4ac + 2ad$

Ausklammern

Allg.: $ab + ac = a(b + c) \quad bzw. \quad ab - bc = b(a - c)$

Bsp.: 1) $3a - ab = a(3 - b)$

2) $4a + 2ab - 6ac = 2a(2 + b - 3c)$

Multiplikation von Summen und Differenzen

Allg.:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Bsp.: $(a + 2)(b - 3) + (2a + 2)(b + 2) = ab - 3a + 2b - 6 + 2ab + 4a + 2b + 4 = a + 4b + 3ab - 2$

Verschachtelte Klammern

Ob runde, eckige oder geschweifte Klammern: Klammern werden von innen nach außen aufgelöst. Die unterschiedliche Art der Klammern dient lediglich der Übersicht.

Bsp.: $2-[3+(2a\cdot\{3+2\})]=2-[3+(2a\cdot 5)]=2-[3+10a]=2-3+10a=-1+10a$

Übungsaufgaben Kap.1:

1) $24+2\cdot 3-5+3\cdot 3=$	6) $-(2a+3a\cdot 2)+(2a+2)(3b-2)=$
2) $5a-3\cdot 6a=$	7) $[3b-(4b+2b)]+4a-(2a+2b)=$
3) $5a(2b+3c-4d-2)=$	8) $\big(2a-(a+2)\big)-(a+1)(b-3)=$
4) $(2a-3b)(4a+2b)=$	9) $(a+1)(a-1)+(2a+1)(2a-1)=$
5) $-(2a+2)(a+3)+15a=$	10) $2a-(3a+2)-(a+3)(5-7)=$

Alle Aufgaben richtig gelöst? Dies ist kein Grund den Vorbereitungskurs auf die Seite zu legen! Es wird noch ein wenig anspruchsvoller...

2. Bruchrechnung

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Man erweitert/kürzt einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner mit derselben Zahl multipliziert/dividiert:

Bsp.: $\frac{3}{2}$ $\quad Erweiterung\ mit\ 2$: $\frac{3\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{6}{4}$ $\quad Kürzen\ mit\ 2$: $\frac{6:2}{4:2}=\frac{3}{2}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Bei der Addition/Subtraktion von Brüchen werden diese durch Erweiterung zunächst auf den Hauptnenner gebracht und anschließend die Zähler addiert/subtrahiert. Der Nenner wird beibehalten:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{9}{6}+\frac{2}{6}=\frac{11}{6}$$

Multiplikation und Division von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man den Zähler miteinander multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{12}{6}\ =(durch\ Kürzen)\ 2$$

Brüche werden dividiert, indem man einen Bruch mit dem Kehrwert des andern Bruchs multipliziert:

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{1}=\frac{5}{2}$$

Übrigens:

Eine ganze Zahl lässt sich in einen Bruch „umwandeln“ indem man die Zahl in den Zähler schreibt und der Nenner 1 ist: $3=\frac{3}{1}$

Übungsaufgaben Kap.2:

Die Ergebnisse sind so weit wie möglich zu kürzen.

1)	$\frac{3}{8}+\frac{1}{32}=$	6)	$3\cdot\frac{3}{4}x-2x=$
2)	$\frac{3}{2}+11=$	7)	$\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)\left(3a-\frac{1}{3}b\right)=$
3)	$\frac{4}{3}a+\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a=$	8)	$\left(\frac{1}{2}x+2\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)=$
4)	$\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a\right)\cdot\frac{2}{3}=$	9)	$\left(\frac{1}{4}a+1\right)\left(\frac{1}{4}a+1\right)=$
5)	$3x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=$	10)	$\left(\frac{2}{3}x-2\right)\left(\frac{2}{3}x+2\right)+4x+4=$

3. Lineare Gleichungen

Gleichungen löst man, indem man durch Äquivalenzumformungen nach der gesuchten Variablen umstellt. Äquivalenzumformungen tätigt man, indem man auf beiden Seiten der Gleichung

- dieselbe Zahl addiert oder
- dieselbe Zahl subtrahiert oder
- dieselbe Zahl multipliziert (außer Multiplikation mit 0) oder
- dieselbe Zahl dividiert (außer Division durch 0).

Bsp.:

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=3 \qquad \left|+\frac{1}{2}\right.$$

$$\frac{1}{2}x=\frac{7}{2} \qquad |\cdot 2$$

$$x=7$$

Übungsaufgaben Kap.3:

Die Ergebnisse sind so weit wie möglich zusammenzufassen.

1)	$33x - 12 = 4$	6)	$2(3x - 3) = 4(2 + 1)$
2)	$3 + 2x - 2 = 12$	7)	$\frac{2}{3}x - 2 = -\frac{1}{3}x + 4$
3)	$-(2x + 3) = -3x - 4$	8)	$\frac{1}{2}x \cdot 4 = 4x + 2$
4)	$2 \cdot (2a + 3) = -(2a - 4)$	9)	$(x + 6)(x - 1) = (x + 5)(x - 2)$
5)	$(2x - 4) \cdot 3 = 2(4x + 2)$	10)	$(x + 2)(x - 2) = x(x + 3)$

4. Bruchgleichungen

Bsp.1:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} = 5 \qquad | \cdot 2 \quad | \cdot 3$$

$$\frac{(x+1) \cdot 2 \cdot 3}{2} + \frac{(x-1) \cdot 2 \cdot 3}{3} = 5 \cdot 2 \cdot 3$$

$$(x+1) \cdot 3 + (x-1) \cdot 2 = 30$$

$$3x + 3 + 2x - 2 = 30$$

$$5x + 1 = 30 \quad | -1 \quad |:5$$

$$x = \frac{29}{5}$$

$$L = \left\{\frac{29}{5}\right\}$$

Bsp.2:

$$\frac{5}{x-1} = \frac{6}{x+2}$$

Falls die Variable im Nenner vorkommt, muss man zuerst die Werte für die Variable berechnen, für die der Nenner Null werden würde. Aufgrund der Division durch Null ist der Bruchterm nicht definiert. Aus diesem Grund muss der Definitionsbereich eingeschränkt werden:

$$x - 1 = 0 \qquad x + 2 = 0$$

$$x = 1 \qquad x = -2$$

$$D = R \setminus \{-2; 1\}$$

$$\frac{5}{x-1} = \frac{6}{x+2} \quad | \cdot (x-1)(x+2)$$

$$5(x+2) = 6(x-1)$$

$$5x + 10 = 6x - 6 \quad |-5x \quad |+6$$

$$16 = x$$

$$L = \{16\}$$

<u>Übungsaufgaben Kap.4:</u>

1)	$\frac{9z}{14} + \frac{4z}{21} = 35$
2)	$\frac{9y}{2} + \frac{7}{2} = 14y - 6$
3)	$\frac{22x-7}{12} = \frac{8x+7}{5}$
4)	$\frac{x-9}{3} + \frac{3x-4}{4} = \frac{2x+3}{3}$
5)	$\frac{4}{11x-65} = \frac{3}{5x}$

5. Lineare Gleichungssysteme

Zwei lineare Gleichungen werden als lineares Gleichungssystem bezeichnet. Als Lösungsverfahren bieten sich das Gleichsetzungsverfahren, das Einsetzungsverfahren und das Additions- bzw. Subtraktionsverfahre an.

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems wird hier mit dem Gleichsetzungsverfahren aufgezeigt:

Bsp.:	Lösungsschritte
$I. \quad y = 2x - 1$ $II. \quad y - 2 = -x$	Beide Gleichungen werden nach einer der beiden Variablen (im Bsp. y) aufgelöst.
$I. \quad y = 2x - 1$ $II. \quad y - 2 = -x \quad |+2$ $y = -x + 2$	Beide Terme werden gleichgesetzt...
$2x - 1 = -x + 2 \quad |+1$ $2x = -x + 3 \quad |+x$ $3x = 3 \quad |:3$ $x = 1$	...und nach der verbliebenen Variablen aufgelöst.
$x = 1 \; in \; I.: \quad y = 2 \cdot 1 - 1$ $y = 1$	Die nun bekannte Variable wird in einer der beiden Gleichungen eingesetzt.
Ergebnis: $x = 1 \; und \; y = 1$	Nach Überprüfung des Ergebnisses (einsetzen in die andere Gleichung) wird das Ergebnis angegeben.

<u>Übungsaufgaben Kap.5:</u>

1)	$I. \quad 3y = 6x - 9$ $II. \quad y + 1 = x + 1$	3)	$I. \quad 4x = y - 5$ $II. \quad y = -x + 5$
2)	$I. \quad y = -2x + 2$ $II. \quad y = -x - 5$	4)	$I. \quad 2x + y = -1$ $II. \quad x + y = 1$

6. Lineare Funktionen

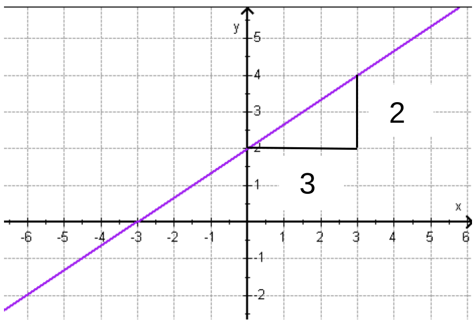
Bei Funktionen wird jedem Element des Definitionsbereichs genau ein Element des Wertebereichs zugeordnet. Funktionen kann man mit Pfeildiagrammen, als Paarmengen, in einer Wertetabelle und in einem Koordinatensystem darstellen.

Lineare Funktionen (ganzrationale Funktionen 1. Grades) sind von der Form: $f: x \to mx + b$. Alternative Schreibweisen für lineare Funktionen: $y = mx + b$ oder $f(x) = mx + b$. Hierbei ist m die Steigung der Geraden und b der Ordinatenabschnitt (Schnittpunkt mit der y-Achse).

Das Schaubild einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Bsp.: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

Schaubild (Graph) der Funktion:



Die Steigung kann direkt in der Funktionsgleichung abgelesen werden (m, hier im Bsp. $\frac{2}{3}$) oder mit Hilfe eines Steigungsdreiecks zeichnerisch ermittelt werden.

Der Punkt, an dem die Gerade die y-Achse schneidet kann am Schaubild bzw. an der Funktionsgleichung abgelesen werden (hier im Bsp. 2). Diesen Wert erhält man auch, indem man in die Funktionsgleichung den Wert 0 für x einsetzt:

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0 \quad : \quad f(0) = \frac{2}{3} \cdot 0 + 2 = 2$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle) errechnet man, indem die Funktionsgleichung Null gesetzt wird und die Gleichung nach x auflöst:

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \quad : \quad \frac{2}{3}x + 2 = 0 \quad | -2 \quad | \cdot \frac{3}{2}$

$$x = -3$$

<u>Übungsaufgaben Kap.6:</u>

Zeichnen Sie die Grafen der nachfolgenden Funktionen und berechnen Sie die Schnittpunkte mit der x- und der y-Achse.

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$	3) $f(x) = -\frac{4}{5}x + 3$
2) $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$	4) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

7. Binomische Formeln

Bei der Anwendung der binomischen Formeln handelt es sich um eine Erleichterung der Multiplikation von Summen und Differenzen.

Bei der Multiplikation von Summen und Differenzen wird jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Sonderfälle dieser Multiplikation von Summen und Differenzen: binomische Formeln

1. Binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Bsp.: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2. Binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Bsp.: $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - x + 4$
3. Binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Bsp.: $(3+2x)(3-2x) = 9 - 4x^2$

<u>Übungsaufgaben Kap.7:</u>

Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

1) $\left(\frac{1}{3} + x\right)^2$	3) $(3x - 4y)(3x + 4y)$
2) $(2a - 3b)^2$	4) $2(2x+2)^2 - 5(x-3)(-x-3)$

Stellen Sie die Terme unter Verwendung der binomischen Formeln als Produkt dar:

5) $4 + 16a + 16a^2$	7) $\frac{9}{4}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{4}{25}$
6) $-4u^2 + 9v^2$	8) $18x^6 - 6x^3y + \frac{1}{2}y^2$

Ergänzen Sie die fehlenden Summanden ($\bigcirc$)

9) $\bigcirc - 8xy + \bigcirc = (\bigcirc - 0{,}5y)^2$	10) $16x^2 - xy + \bigcirc = (\bigcirc - \bigcirc)^2$

8. Quadratische Gleichungen

Lösung Reinquadratischer Gleichungen:

Bsp. 1: $$x^2 = 16 \quad |\sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm 4$$

Bsp. 2: $$3x^2 - 2 = 10 \quad |+2 \quad |:3 \quad |\sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm 2$$

Lösung Gemischtquadratischer Gleichungen:

Bsp. 1:

hier existiert keine Zahl ohne x! Lösungsweg: ausklammern:

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x(x-7) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 7$$

Bsp. 2:

Wenn die Gleichung als Produkt vorliegt, kann die Lösung direkt abgelesen werden:

$$(x-7)(x+3) = 0$$

$$x_1 = 7 \quad , \quad x_2 = -3$$

Bsp. 3:

$$3x^2 - 30x + 48 = 0$$

Lösung durch Anwendung der abc-Formel (alternativ kann auch die pq-Formel angewandt werden, bei der die quadratische Gleichung zuvor allerdings auf die Normalform gebracht werden muss)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Im Bsp.: $a = 3, \quad b = -30, \quad c = 48$

$$x_{1/2} = \frac{30 \pm \sqrt{-30^2 - 4 \cdot 3 \cdot 48}}{2 \cdot 3} = \frac{30 \pm \sqrt{324}}{6} = \frac{30 \pm 18}{6}$$

$$x_1 = 8 \quad x_2 = 2$$

Quadratischen Gleichungen können **zwei, eine oder keine Lösung** besitzen:

- Ist der Ausdruck unter der Wurzel (Diskriminante) > 0, dann existieren 2 Lösungen.
- Ist der Ausdruck unter der Wurzel (Diskriminante) = 0, dann existiert 1 Lösung.
- Ist der Ausdruck unter der Wurzel (Diskriminante) < 0, dann existiert keine Lösung.

Übungsaufgaben Kap.8:

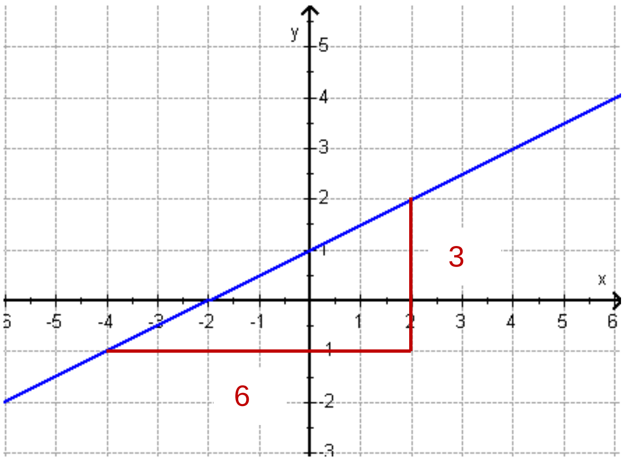
1) $9x^2 - 22x = 0$	6) $x^2 - 4x - 1 = 0$
2) $5x^2 - 17x = 8x$	7) $2x^2 - 4x - 6 = 0$
3) $(x+6)(x-8) = 0$	8) $3x^2 - 22x + 35 = 0$
4) $(2x-6)(3x-6) = 0$	9) $9x^2 = -6x - 1$
5) $x^2 - 7x + 6 = 0$	10) $-7x = -12 - 3x^2$

9. Satz des Pythagoras

Bei rechtwinkligen Dreiecken gilt: $c^2 = a^2 + b^2$ wobei c die Hypotenuse (längste Seite, die gegenüber dem rechten Winkel ist) und a und b die Katheten sind (a und b bilden den rechten Winkel).

Anwendungsbeispiel:

Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte $P_1(-4|-1)\ und\ \ P_2(2|2)$ in einem Koordinatensystem.



Der gesuchte Abstand ist die Länge der Hypotenuse (c). Die beiden Katheten haben die Längen 3 und 6 (s.o).

$$c = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}71\ EH$$

Übungsaufgaben Kap.9:

1) Wie lang ist die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, wenn die beiden Katheten 14 und 10 cm lang sind?	2) Ermitteln Sie rechnerisch den Abstand der Punkte $A(-3|2) und\ B(4|-2)$ in einem Koordinatensystem.

10. Lösungen

Kap.1

1)	34	6)	-12a+6b+6ab-4
2)	-13a	7)	2a-5b
3)	10ab+15ac-20ad-10a	8)	4a-b-ab+1
4)	$8a^2$-8ab-$6b^2$	9)	$5a^2$-2
5)	-$2a^2$+7a-6	10)	a+4

Kap.2

1)	$\frac{13}{32}$	6)	$\frac{1}{4}x$
2)	$\frac{25}{2}$	7)	$\frac{3}{2}a^2+\frac{11}{6}ab-\frac{2}{9}b^2$
3)	$\frac{5}{6}a+\frac{1}{4}ab$	8)	$\frac{1}{4}x^2-4$
4)	$\frac{1}{2}a$	9)	$\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{2}a+1$
5)	$\frac{19}{6}x$	10)	$\frac{4}{9}x^2+4x$

Kap.3

1)	$x=\frac{16}{33}$	6)	$x=3$
2)	$x=\frac{11}{2}$	7)	$x=6$
3)	$x=-1$	8)	$x=-1$
4)	$a=-\frac{1}{3}$	9)	$x=-2$
5)	$x=-8$	10)	$x=-\frac{4}{3}$

Kap.4

1)	$z=42$
2)	$y=1$
3)	$x=8{,}5$
4)	$x=12$
5)	$x=15$

Kap.5

1)	x=3 ; y=3	3)	x=0 ; y=5
2)	x=7 ; y=-12	4)	x=-2 ; y=3

Kap.6

Zur Überprüfung der Lösung können Online-Funktionsplotter (z.B. www.mathe-fa.de) bzw. das kostenlos verfügbare Programm funkyplot (www.funkyplot.de) verwendet werden.

Kap. 7

1) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$	3) $9x^2 - 16y^2$
2) $4a^2 - 12ab + 9b^2$	4) $13x^2 + 16x - 37$

5) $(4a + 2)^2$	7) $(\frac{3}{2}x + \frac{2}{5})^2$
6) $(3v + 2u)(3v - 2u)$	8) $18(x^3 - \frac{1}{6}y)^2$

9) $64x^2 \quad \frac{1}{4}y^2 \quad 8x$	10) $\frac{1}{64}y^2 \quad 4x \quad \frac{1}{8}y$

Kap.8

1) $x_1 = 0 \quad x_2 = 2{,}44$	6) $x_1 = 4{,}24 \quad x_2 = -0{,}24$
2) $x_1 = 0 \quad x_2 = 5$	7) $x_1 = 3 \quad x_2 = -1$
3) $x_1 = -6 \quad x_2 = 8$	8) $x_1 = 5 \quad x_2 = 2{,}33$
4) $x_1 = 3 \quad x_2 = 2$	9) $x_1 = -0{,}33 \quad x_2 = -0{,}33$
5) $x_1 = 6 \quad x_2 = 1$	10) $keine\ Lösung$

Kap.9

1) 17,20cm	2) 8,06